

5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

1. Parke buvo pasodinti du egzotiniai sodinukai. Vieno iš jų aukštis yra 138 cm ir jis paauga 3 cm per kiekvienus 2 metus, o kito aukštis yra 174 cm ir jis paauga po 5 cm per kiekvienus 6 metus. Po kiek metų sodinukai bus vienodo aukščio?

A 24 B 36 C 40 D 48 E 54

Sprendimas. Per 6 metus pirmasis paauga 9 cm, antrasis – 5 cm. Tai per 6 metus augalų aukščių skirtumas sumažėja 4 cm. Kadangi pradžioje skirtumas yra 36 cm, tai po $36 : 4 = 9$ periodų po 6 metus, t. y. po 54 metų, augalų aukštis bus vienodas. **Atsakymas. E.**

2. Kam lygi suma $a + b + c + d + e$, jeigu $a + b = 2$, $b + c = 3$, $c + d = 4$, $d + e = 5$ ir $e + a = 6$?

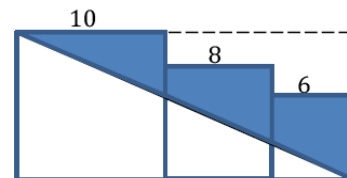
A 10 B 12 C 15 D 20 E Neįmanoma nustatyti

Sprendimas. Sudėję visų lygybių kaires ir visų lygybių dešines puses, gauname $2a + 2b + 2c + 2d + 2e = 20$, todėl $a + b + c + d + e = 10$. **Atsakymas. A.**

3. Trys kvadratai, kurių kraštinių ilgiai yra 10 cm, 8 cm ir 6 cm, išsidėstę taip, kaip parodyta brėžinyje. Raskite nudažytos dalies plotą.

Sprendimas. Papildykime duotą figūrą iki stačiakampio. Jo plotas bus lygus $(10 + 8 + 6) \cdot 10 = 240$. Stačiakampio įstrižainė jo plotą dalija pusiau, todėl nudažytos figūros plotas lygus: $240 : 2 - 8 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = 80$.

Atsakymas. 80 cm^2 .



4. Į stačiakampį $ABCD$ įbrėžti keturkampiai yra kvadratai. Kvadrato $AEFG$ perimetras lygus 8 cm. Kam tuomet lygus stačiakampio $ABCD$ perimetras?

Sprendimas. Kadangi kvadrato $AEFG$ perimetras lygus 8 cm, tai $EF = 2$ cm. Tuomet $EL = 6$ cm, tai didesnio kvadrato kraštinė $LM = 3$ cm.

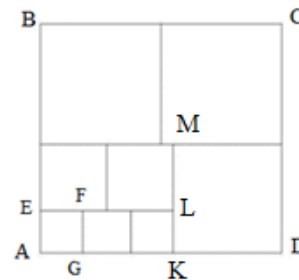
Tuomet $KM = 2 + 3 = 5$ (cm), tuo pačiu ir $KD = 5$ cm.

Iš to išplaukia, kad $AD = 2 \cdot 3 + 5 = 11$ (cm). Kadangi ir $BC = 11$ cm, tai dviejų viršutinių kvadratų kraštinių ilgiai yra 5,5 cm.

Tuomet $AB = 2 + 3 + 5,5 = 10,5$ (cm).

Stačiakampio $ABCD$ perimetras lygus: $P = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 10,5 = 43$ (cm).

Atsakymas. 43 cm.



5. Ant stebuklingo medžio užaugo 15 bananų ir 20 apelsinų. Vienu metu galima nuskinti tik vieną arba du vaisius. Nuskynus vieną vaisių užauga toks pats, nuskynus du vienodus – užauga apelsinas, o du skirtingus – bananas.

1) Ar galima taip skinti vaisius, kad ant medžio liktų tik vienas vaisius? Jeigu galima, tai paaiškinkite, kaip? Jeigu negalima – kodėl?

2) Ar galima skinti taip, kad neliktų nieko?

Sprendimas. 1) Pradinis bananų skaičius 15 yra nelyginis. Kaip mes beskindume vaisius, bananų visada yra nelyginis skaičius: nuskynus 2 bananus – užauga apelsinas, t. y. bananų skaičius sumažėja dviem ir lieka nelyginis; nuskynus 1 bananą (su apelsinu ar be jo – nesvarbu), tai užauga bananas, t. y. bananų skaičius lieka nepakitęs. Apelsinų skaičius, kadangi gali kisti vienetu, taigi gali tapti bet koku – ir nuliu taip pat. Taigi, jeigu gali likti vienas vaisius, tai jis – bananas. Vienas bananas liks, jeigu skinsime, pavyzdžiui, taip: 7 kartus po 2 bananus – liks 1 bananas ir 27 apelsinai. Po to 27 kartus skinsime po bananą ir apelsiną – liks tik vienas bananas. 2) Kad ir kaip beskindume, visada liks bent vienas bananas.

Atsakymas. 1) Gali likti vienas bananas; 2) visų vaisių nuskinti neįmanoma.

5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

- 6. Karlsonas pietums nusipirko 8 pyragaičius ir 15 bandelių, o Mažylis – vieną pyragaitį ir vieną bandelę. Karlsonas už savo pietus sumokėjo lygiai 2 eurus (kiekvienas pyragaitis ir kiekviena bandelė kainuoja sveiką centų skaičių). Kiek už savo pietus sumokėjo Mažylis?**

Sprendimas. Pyragaičio kainą pažymėkime p , o bandelės kainą – b . Tuomet $8p + 15b = 200$.

Kadangi antras dėmuo ir suma dalijasi iš 5, tai ir pirmas dėmuo turi dalytis iš 5.

Tikriname: 1) kai $p = 5$, tai $8 \cdot 5 + 15b = 200$, $15b = 160$. Kadangi 160 nesidalija iš 15, tai 5 netinka.

2) kai $p = 10$, tai $8 \cdot 10 + 15b = 200$, $15b = 120$, $b = 8$.

Patikrinę reikšmes $p = 15$ ir $p = 20$ naujų sprendinių negauname.

Todėl Mažylis už vieną pyragaitį ir vieną bandelę sumokėjo $8 + 10 = 18$ centų.

Atsakymas. 18 centų.

- 7. Šachmatų turnyre kiekvienas žaidėjas sužaidė su kiekvienu likusiu po vieną partiją. Už pergalę žaidėjas gauna 1 tašką, už lygiąsias $\frac{1}{2}$ taško, už pralaimėjimą – 0 taškų. Andriaus, Beno, Danieliaus ir Eimanto surinktų taškų sumos yra atitinkamai $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 3 ir $1\frac{1}{2}$. Nei vienas likęs žaidėjas nesurinko daugiau negu Eimantas. Kiek be šių keturių buvo dar kitų žaidėjų ir kiek jie kartu surinko taškų?**

Sprendimas.

Jeigu buvo 4 žaidėjai, tai sužaistos 6 partijos,

Jeigu buvo 5 žaidėjai, tai sužaista 10 partijų,

Jeigu buvo 6 žaidėjai, tai sužaista 15 partijų,

Jeigu buvo 7 žaidėjai, tai sužaista 21 partija.

Bendras surinktų taškų skaičius lygus sužaistų partijų skaičiui. Keturi vaikinai kartu surinko $12\frac{1}{2}$ taško, todėl žaidėjų buvo ne mažiau kaip 6.

Jeigu būtų 7 žaidėjai, tai kiti trys kartu būtų surinkę $21 - 12\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$ taško. Tačiau kitų žaidėjų taškų suma negali būti lygi šiam skaičiui, nes pagal sąlygą nei vienas iš jų nesurinko daugiau už Eimantą. Analogišką išvadą būtų ir tuo atveju, jeigu žaidėjų būtų daugiau negu 7. Taigi, žaidėjų galėjo būti tiksliai 6.

Jeigu būtų 6 žaidėjai, tai kiti du kartu būtų surinkę $15 - 12\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ taško.

Būtina parodyti, kad turnyras su tokiais rezultatais yra įmanomas!

Tai parodome lentelę:

	An	Be	Da	Ei	X	Y	
An		$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	$4\frac{1}{2}$
Be	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$3\frac{1}{2}$
Da	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	1	3
Ei	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$
X	0	0	0	$\frac{1}{2}$		1	$1\frac{1}{2}$
Y	0	0	0	1	0		1

Atsakymas. Buvo 2 kiti žaidėjai, jie kartu surinko $2\frac{1}{2}$ taško.