



5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

1. Kiek egzistuoja tokių natūraliųjų skaičių m , kad $\frac{400}{m}$ būtų sveikas skaičius?

A 7 **B** 8 **C** 14 **D** 15 **E** 20

Sprendimas. $400 = 2^4 \cdot 5^2$, tai skaičius 400 turi $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ skirtingų daliklių. Tuomet su 15 m reikšmių trupmenos reikšmė bus sveikasis skaičius. Galima ir išsirašyti visus daliklius.

Atsakymas. D.

2. Emilė turi septynias ypatingas monetas – su skaičiais abiejose monetos pusėse. Pirmos monetos vienoje pusėje yra skaičius 1, kitoje – skaičius 8; antros monetos vienoje pusėje yra skaičius 2, kitoje – skaičius 9 ir t. t.; septintos monetos vienoje pusėje yra skaičius 7, kitoje – skaičius 14. Jeigu Emilė pabers monetas ant stalo ir suskaičiuos į viršų atsivertusių skaičių sumą, tai kiek skirtingų sumų ji gali gauti?

A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 128

Sprendimas. Jeigu visos sumos atsivers mažesniuoju skaičiumi, tai visų šių skaičių suma bus lygi 28, jeigu visos atsivers didesniuoju skaičiumi, tai visų šių skaičių suma bus lygi 77. Abi sumos dalijasi iš 7. Apvertus bet kurią monetą, suma pasikeičia septyniais vienetais. Galimos sumos yra visi 7 kartotiniai nuo 28 iki 77. Jų yra 8.

Atsakymas. A.

3. Sunkvežimio vairuotojas paėmė krovinį iš gamyklos ir turėjo pristatyti jį į sandėlį, esantį už 90 km nuo gamyklos. Pirmąją pusę kelio vairuotojas važiavo į kalną ir įveikė ją 45 km/h greičiu. Likusius 45 kilometrus jis važiavo 90 km/h greičiu. Kokiu vidutiniu greičiu važiavo sunkvežimis šios kelionės metu?

Sprendimas. Pirmą pusę kelio sudaro 45 km, kuriuos sunkvežimis įveiks per vieną valandą. Likusius 45 km, važiuodamas 90 km/h greičiu, sunkvežimis įveiks per 0,5 valandos. Taigi, visa kelionė truks 1,5 valandos.

Vidutinis greitis lygus visam keliui padalytam iš viso laiko, todėl $v_{\text{vid}} = \frac{90}{1,5} = 60$ (km/h).

Atsakymas. 60 km/h.

4. Lentelėje, kurios matmenys 5×5 , kiekviename langelyje įrašyta raidė V, D arba U taip, kaip parodyta piešinyje. Pradėdami skaityti nuo centro ir persikeldami į langelį, turintį bendrą kraštinę arba bendrą viršūnę su prieš tai buvusiu langeliu, galime perskaityti trumpinį “VDU”. Keliais skirtingais būdais galima perskaityti “VDU”?

Sprendimas. Kiekviename langelyje įrašykime, keliais skirtingais būdais į jį galima patekti. Į kiekvieną langelį su raide D galima patekti vieninteliu būdu – iš centrinės raidės V į langelį su raide D.

U	U	U	U	U
U	D	D	D	U
U	D	V	D	U
U	D	D	D	U
U	U	U	U	U

1	2	3	2	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	3
2	1	1	1	2
1	2	3	2	1

Į langelį su raide U galima patekti 1; 2; 3; 2 ir 1 būdais, pradedant skaičiuoti nuo kažkurio kampinio langelio (žr. piešinį dešinėje).

U	U	U	U	U
U	D	D	D	U

Kadangi frazė “VDU” baigiasi kažkuriame iš langelių su raide U, tai ją galima perskaityti:

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 = 32$ būdais.

Atsakymas. 32 būdais.



5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

5. Raskite didžiausią triženklį skaičių, kuris:

- 1) gali būti išreikštas dviejų paeiliui einančių sveikųjų skaičių suma;
- 2) gali būti išreikštas trijų paeiliui einančių sveikųjų skaičių suma;
- 3) gali būti išreikštas penkių paeiliui einančių sveikųjų skaičių suma.

Sprendimas. Dviejų paeiliui einančių skaičių suma yra nelyginis skaičius; trijų paeiliui einančių skaičių suma dalijasi iš 3; penkių paeiliui einančių skaičių suma dalijasi iš 5. Todėl ieškomasis skaičius yra nelyginis ir dalus iš 15. Didžiausias nelyginis skaičius, kuris dalijasi iš 15, yra 975.

Reikia parodyti, kad jį galima sudaryti iš dviejų, trijų ir penkių paeiliui einančių skaičių.

$$975 = 487 + 488.$$

Jeigu skaičius yra lygus trijų paeiliui einančių sveikųjų skaičių sumai, tai vidurinis skaičius lygus tos sumos trečdaliui. $975 : 3 = 325$, tuomet $975 = 324 + 325 + 326$.

Analogiškai su penkiais dėmenimis (ir bet kuriuo nelyginiu skaičiumi paeiliui einančių dėmenų).

$$975 : 5 = 195, \text{ todėl } 975 = 193 + 194 + 195 + 196 + 197.$$

Atsakymas. 975.

6. Mokiniai, turėdami labai daug vienodo dydžio kubelių nutarė patikrinti, kokio dydžio kubą be tarpų iš jų galima sudėti. Sudėjus kubą pasirodė, kad jame yra 168 kubeliai, kurių lygiai keturios sienos liečiasi su kitų kubelių sienomis. Kiek kubelių sudaro sudėtojo kubo briauną?

Sprendimas. Kubą sudarantys kubeliai gali liestis su kaimyniniais kubeliais visomis šešiomis sienomis arba penkiomis, arba keturiomis, arba trimis sienomis. Keturiomis sienomis liečiasi kubeliai, esantys kubo briaunose, tarp kubelių, esančių kubo viršūnėse. Kadangi kubas turi 12 briaunų, tai vienoje didžiojo kubo briaunoje yra $168 : 12 = 14$ kubelių, kurių 4 sienos liečiasi su kitais kubeliais. Pridėję du kubo viršūnėse esančius kubelius, gauname, kad vienoje briaunoje yra 16 kubelių.

Atsakymas. 16 kubelių.

7. Kam lygus keturženklis skaičius, kuris padidėja 4 kartus surašius jo skaitmenis atvirkščia tvarka?

Sprendimas. Sąlygoje prašoma rasti skaičių $\overline{abcd}$ tokį, kad $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$.

Skaitmuo $a < 3$, nes kitaip $3000 \cdot 4 = 12000$, t. y. gaunama penkiaženklis skaičius.

Skaičius $\overline{dcba}$ yra lyginis, todėl a turi būti lyginis. Taigi, $a = 2$.

Iš lygybės $\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}$ gauname, kad $d \geq 8$, o $d \cdot 4$ baigiasi skaitmeniu 2, todėl $d = 8$.

Turime: $\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}$,

$$(2000 + 100b + 10c + 8) \cdot 4 = 8000 + 400b + 40c + 32,$$

$$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2.$$

Sutraukę panašiuosius narius ir abi puses padaliję iš 30, gauname:

$$390b + 30 = 60c,$$

$$13b + 1 = 2c.$$

Dešinėje reiškinių pusėje yra lyginis skaičius, todėl skaitmuo b turi būti nelyginis ir mažesnis už 2. Gauname, kad $b = 1$ ir $c = 7$. Ieškomas skaičius yra 2178.

Atsakymas. 2178.